Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
27 octombrie 2013

Soluţii
RUNDA a III-a

Problema 1. Să se determine cifrele a,b,c (din baza zece) şi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\overline{abc} = 7^n \cdot (a+b+c)$.

Soluţie: Pentru
$n = 0 \Rightarrow \overline{abc} = a+b+c, a+b+c \le 27 (nu\ convine);$
$n = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 7 \cdot (a+b+c) \Leftrightarrow 31 \cdot a + b = 2c (nu\ convine);$
$n = 2 \Rightarrow \overline{abc} = 7^2 \cdot (a+b+c) \Leftrightarrow 51 \cdot a = 39 \cdot b + 48 \cdot c \Leftrightarrow$
$17 \cdot a = 13 \cdot b + 16 \cdot c \Leftrightarrow 4a - 3c = 13 \cdot (b + c - a) \Rightarrow$
$13 / 4a - 3c \Rightarrow$
$a = 4, c = 1, b = 4;$
$a = 7, b = 3, c = 5;$
$a = 8, b = 8, c = 2.$
Pentru $n \ge 3 \Rightarrow a+b+c \in \{0,1\} (nu\ convine) (a+b+c \ge 3).$

Răspuns:
$(a,b,c) \in \{(4,4,1),(7,3,5),(8,8,2)\}$
$n = 2.$

Problema 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia
$x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = 2 \cdot (x+y+z) + 8,\ x \le y \le z$.

Soluţie:
$x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = 2 \cdot (x+y+z) + 8 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (y-1) + (y-1) \cdot (z-1) + (z-1) \cdot (x-1) = 11.$
Dacă
$x \ge 3, y \ge 3, z \ge 3, atunci\ (x-1) \cdot (y-1) + (y-1) \cdot (z-1) + (z-1) \cdot (x-1) \ge 12 (nu\ convine)$.
Deci $x \in \{0,1,2\}$.
Dacă $x = 0 \Rightarrow$
$yz - 2y - 2z = 8 \Leftrightarrow (y-2) \cdot (z-2) = 12 \Rightarrow$
$\begin{cases} y-2=1 \\ z-2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=14 \end{cases}$
$\begin{cases} y-2=2 \\ z-2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=8 \end{cases}$
$\begin{cases} y-2=3 \\ z-2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ z=6 \end{cases}$

Dacă $x=1\Rightarrow (y-1)\cdot(z-1)=11\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=12 \end{cases}$

Dacă $x=2\Rightarrow \ yz=12\Rightarrow$

$\begin{cases} y=1 \\ z=12 \end{cases}(nu\ convine);\begin{cases} y=2 \\ z=6 \end{cases};\begin{cases} y=3 \\ z=4 \end{cases}$

Răspuns: $(x,y,z)\in\{(0,3,14);(0,4,8),(0,5,6),(1,2,12),(2,2,6),(2,3,4)\}$.

Problema 3. Să se determine numerele raţionale a cu proprietatea că $\frac{2\cdot a^2-5\cdot a+7}{2\cdot a-5}\in\mathbb{Z}$.

Soluţie: Fie

$a=\frac{p}{q}, p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*, (p,q)=1.$

$\frac{2\cdot p^2-5\cdot p\cdot q+7\cdot q^2}{q\cdot(2\cdot p-5\cdot q)}\in\mathbb{Z}\Rightarrow q/(2\cdot p^2-5\cdot p\cdot q+7\cdot q^2)\Rightarrow q/2$(pentru că $(p,q)=1$).

$q/2\Rightarrow q\in\{1,2\}.$

$q=1\Rightarrow \frac{2\cdot p^2-5\cdot p+7}{2\cdot p-5}=p+\frac{7}{2p-5}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2p-5/7\Rightarrow p\in\{-1,2,3,6\}\Rightarrow a\in\{-1,2,3,6\}.$

$q=2\Rightarrow \frac{p^2-5\cdot p+14}{2\cdot p-10}=\frac{p}{2}+\frac{7}{p-5}\Rightarrow p+\frac{14}{p-5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow p-5/14\Rightarrow p\in\{-9,-2,3,4,6,7,12,19\}$

Rezultă $a\in\left\{-1,2,3,6,-\frac{9}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{19}{2}\right\}$

Răspuns: $a\in\left\{-1,2,3,6,-\frac{9}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{19}{2}\right\}$